Том СХIУ Труды Всесоюзного научно-исследовательского института морского рыбного хозяйства и океанографии (ВНИРО) 1976

УДК 551.46.062 : 51 : 551.463 : 551.465.7

О СОВМЕСТНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОДЫ И ВОЗДУХА ПО СТАТИСТИЧЕСКИ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

П.С.Гасюков

Широкое использование в практике рыбохозяйственных исследований информации о состоянии океана и атмосферы делает особенно актуальной проблему сбора, обработки и хранения этой информации. Один из аспектов проблемы - преобразование исходной информации, заключающееся в выделении наиболее существенных особенностей и фильтрации мелких деталей и шумов (Николаев, 1969). В гидрометеорологии для этого разработан и используется ряд методов, среди которых наиболее широкое распространение получил метод разложения полей по естественным ортогональным составляющим (Багров, 1959; Мещерская и др., 1969; Обухов, 1960).

Этот метод наиболее точно в статистическом смысле позволяет описать поле гидрометеорологического элемента малым числом членов разложения.

Пусть поле элемента в фиксированные моменты времени t_k представлено его значениями в ряде точек с координатами $(x_i y_i)$

$$x(x_i y_i t_j) = x_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\dots,M \\ j = 1,2,\dots,N \end{array}$$

Поставим задачу аппроксимировать функцию x_{ij} суммой ряда

$$x_{ij} = \bar{x}_i + \sum_{k=1}^{n} c_{kj}\varphi_{ki} \tag{I}$$

Исходя из условия минимума среднего квадрата ошибки при фиксированном n

$$\delta_n^2 = \frac{1}{MN}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\left[x_{ij} - \sum_{k=1}^{n} c_{kj}\varphi_{ki}\right]^2 \tag{2}$$

где φ_{ki} - система функций, зависящих только от координат точек, а C_{kj} - изменяющиеся во времени коэффициенты разложения.

Решение этой задачи заключается в нахождении функций φ_{ki} которые являются решением системы однородных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} A_{kj}\varphi_{ij} = \lambda_i \varphi_{ik} \tag{3}$$

где A_{kj} - ковариационные моменты для точек K и j , а λ_i - собственные числа ковариационной матрицы и коэффициентов C_{kj} , которые можно вычислить по формуле

$$C_{kj} = \sum_{i=1}^{M} (x_{ij} - \bar{x}_i)\varphi_{ik} \tag{4}$$

Оп Опыт использования этого метода для представления полей давления, температуры воды и воздуха, ледовитости морей подтвердил его высокую эффективность при решении большого класса важных прикладных задач (Мещерская и др., 1969).

Возможны различные обобщения метода разложения полей по естественным ортогональным составляющим (Мещерская и др.,1969). Поскольку физические процессы в океане и в атмосфере описываются несколькими параметрами, изменение которых во времени и в пространстве взаимосвязано, целесообразно обобщить этот метод с учетом свойств взаимной зависимости и взаимной обусловленности различных гидрометеорологических полей. Суть обобщения заключается в следующем.

Пусть задано M выборочных реализаций совокупности полей нескольких гидрометеорологических элементов. В качестве элементов этой совокупности можно рассматривать, например, приземные поля давления, температуры воздуха, влажности, количества осадков или поля температуры воды, солености на различных горизонтах и атмосферного давления на уровне океана в каком-либо определенном районе.

Можно представить совокупность таких полей p -мерным случайным процессом $x^{(p)}(C)$. Требуется найти такую вектор-функцию $\varphi_i^{(p)}(S)$ и такие коэффициенты C_{mi} , при которых справедливо приближенное равенство

$$x_m^{(p)}(S) = \bar{x}^{(p)}(S) + \sum_{i=1}^{k} C_{mi}\varphi_i^{(p)}(S). \tag{5}$$

Ошибка представления (5) является векторной величиной $\bar{\delta}=(\delta_1,\ldots,\delta_p)$ поэтому вектор-функции $\varphi_i^{(p)}(S)$ и коэффициенты c_i следует находить из условия минимума нормы вектора $\bar{\delta}$:

$$\|\bar{\delta}\|^2=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{M}\int_R\Big[x_j^{(i)}(S)-\sum_{l=1}^{K}c_{jl}\,\varphi_l^{(i)}(S)\Big]^2 dS \tag{6}$$

Это приводит к следующим формулам для вычисления c_j и функций $\varphi_i(S)$:

$$c_j=\frac{\sum_{i=1}^{p}\int_R\varphi_i(S)\,x_j^{(i)}(S)\,dS}{\sum_{i=1}^{p}\int[\varphi^{(i)}(S)]^2\,dS}\ ; \tag{7}$$

$$\varphi_i^{(p)}(t)=\sum_{j=1}^{p}\int_R K_{ij}(S,t)\,\varphi_j^{(p)}(S)\,dS\ , \tag{8}$$

где $K_{ij}(S,t)$ – корреляционная функция векторного случайного процесса.

Функции $\varphi_i^{(p)}(S)$, являющиеся решениями системы интегральных уравнений (8), обладают свойством ортогональности. Коэффициенты C_i представляют собой некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями, равными собственному числу λ_i , которому соответствует вектор-функция $\varphi_i^{(p)}(S)$ а ошибка разложения вычисляется для каждой компоненты векторного случайного процесса $x^{(p)}(S)$ по формуле

$$[\delta^{(i)}]^2=\int_R\Big[K_{ij}(S,S)-\sum_{j=1}^{K}\lambda_j\cdot\|\varphi_j^{(i)}(S)\|\Big]dS. \tag{9}$$

Рассмотрим разложение приведенным методом выборочной совокупности среднемесячных полей поверхностной температуры воды и температуры воздуха в Северной Атлантике и сравним его с разложением соответствующих полей по методу Н.А.Багрова (1959).

В качестве исходных данных использовался статистический материал, полученный по наблюдениям с кораблей погоды за 1948-1968 гг. ("Среднемесячная температура...", 1968).

Были вычислены первые пять членов в разложениях (I) и (5) и соответствующие им коэффициенты, а также характеристики скорости сходимости в обоих случаях и оценки степени близости собственных функций.

Для характеристики скорости сходимости обычно используют величину относительной дисперсии, описываемую суммой первых членов разложения, которую для общего случая можно записать формулой

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i}{\sum_{i} \lambda_i} \tag{10}$$

а для каждой компоненты процесса в представлении (5) - формулой

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \| \varphi_i^{(j)}(S) \|}{\sum_{i} \lambda_i}, \qquad j = \overline{1, p} \tag{11}$$

Результаты приведены в табл.I. Их анализ показывает, что скорость сходимости разложения (5) достаточно высока: первые пять членов описывают более 70% суммарной дисперсии. Однако сходимость для первой векторной компоненты (поле температуры воды) оказывается ниже, чем для второй (поле температуры воздуха). Скорость сходимости при совместном разложении полей оказывается несколько ниже, чем при разложении полей одного элемента. Это вполне можно объяснить возросшей статистической неопределенностью системы.

В то же время приведенные результаты показывают, что для достаточно полного представления полей температуры воды и воздуха необходимо использовать по пять членов разложения (I), тогда как при использовании метода (5) можно ограничиться всего шестью членами для совместного представления этих полей.

Оценки степени близости формы собственных функций, которые, как обычно, вычислялись как косинусы углов между векторами в соответствующих пространствах, приведены в табл.2, а сами функции - на рис.I и 2.

Таблица I

Характеристики скорости сходимости разложений (I) и (5) полей температуры воды и температуры воздуха в Северной Атлантике

Совместное разложение полей (5)				Разложение поля температуры воды (5)		Разложение поля температуры воздуха (I)	
λ_i^2	$\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2}$	$\lambda_i^{(2)} \cdot \lVert \varphi_i^{(1)} \rVert$ воды	$\lambda_i^{(2)} \cdot \lVert \varphi_i^{(2)} \rVert$ воздуха	$\lambda^{(1)}$ воды	$\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(1)}}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(1)}}$	$\lambda^{(1)}$ воздуха	$\frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(1)}}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(1)}}$
2,88	0,264	0,23	0,29	I,34	0,29	2,04	2,32
2,09	0,456	0,33	0,54	0,80	0,47	I,70	0,59
I,08	0,555	0,40	0,66	0,66	0,6I	0,9I	0,74
0,98	0,644	0,49	0,75	0,6I	0,75	0,63	0,83
0,72	0,7II	0,62	0,78	0,42	0,84	0,42	0,90

Таблица 2

Оценки степени близости собственных функций при разложении по методам (I) и (5)

	$\varphi_{II}^{(5)}$	$\varphi_{2I}^{(5)}$	$\varphi_{I2}^{(5)}$	$\varphi_{22}^{(5)}$	$\varphi_{II}^{(I)}$	$\varphi_{2I}^{(I)}$	$\varphi_{I2}^{(I)}$	$\varphi_{22}^{(I)}$
$\varphi_{II}^{(5)}$	I,00	0,96	- 0,04	0,06	- 0,99	- 0,95	0,00	- 0,06
$\varphi_{2I}^{(5)}$	0,96	I,00	- 0,07	0,02	- 0,95	- 0,99	0,00	- 0,II
$\varphi_{I2}^{(5)}$	- 0,04	- 0,07	I,00	0,98	0,00	- 0,03	0,83	0,97
$\varphi_{22}^{(5)}$	0,06	0,02	0,98	I,00	- 0.IO	- 0,I2	0,82	0,99
$\varphi_{II}^{(I)}$	- 0,99	- 0,95	0,00	- 0,IO	I,00	0,94	0,00	0,0I
$\varphi_{2I}^{(I)}$	- 0,95	- 0,99	- 0,03	- 0,I2	0,94	I,00	- 0,I9	0,00
$\varphi_{I2}^{(I)}$	0,00	0,00	0,83	0,82	0,00	- 0,I9	I,00	0,8I
$\varphi_{22}^{(I)}$	- 0,06	- 0,II	0,97	0,99	0,0I	0,00	0,8I	I,00

Примечание. Верхний индекс обозначает метод разложения; первый нижний индекс – поле температуры воды или воздуха (соответственно I или 2), второй нижний индекс – порядковый номер функции φ

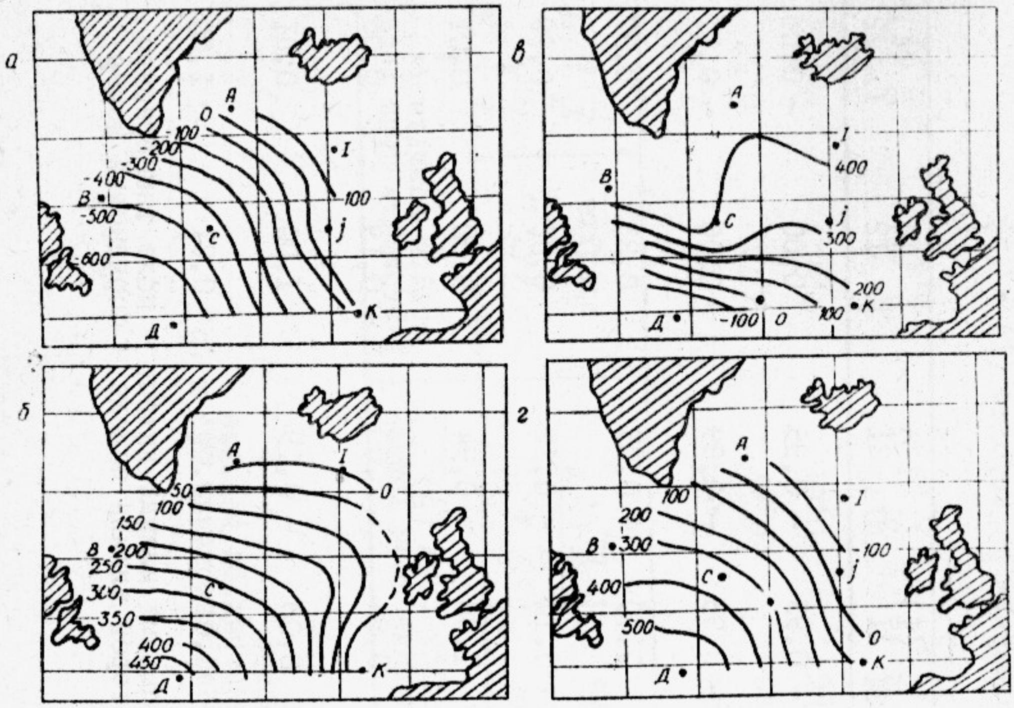

Рис.1. Первая естественная ортогональная функция полей температуры воды (а – $\varphi^{(2)}_{11}$; б – $\varphi^{(1)}_{11}$) и воздуха (в – $\varphi^{(2)}_{21}$; г – $\varphi^{(1)}_{21}$)

Формы первых векторов во всех случаях оказались очень близки и, по-видимому, их можно рассматривать как адвективную составляющую притока тепла. Однако для остальных членов разложений, значимых по своему весу, такого согласия нет. Этот факт заслуживает внимания. Дело в том, что естественные ортогональные функции координат принято считать стоячими волнами типа термобарических сейш. То, что их форма существенно меняется при использовании обобщенного метода, дающего возможность анализировать и учитывать взаимную обусловленность полей различных гидрометеорологических характеристик, позволяет добиться большей ясности в этом вопросе.

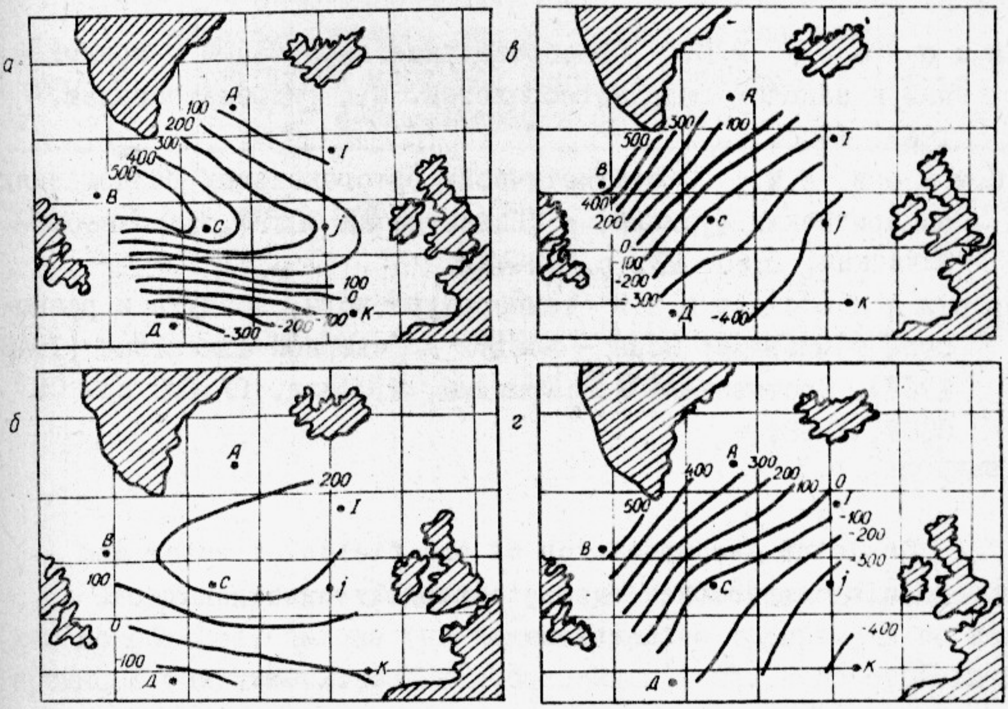

Рис.2. Вторая естественная ортогональная функция полей температуры воды (а – $\varphi\binom{2}{12}$; б – $\varphi\binom{1}{12}$) и воздуха (в – $\varphi\binom{2}{22}$; г – $\varphi\binom{1}{22}$)

Представление совокупности полей посредством разложения в ряды по естественным ортогональным функциям может быть использовано для решения ряда задач восстановления и прогнозирования физических условий в океане и атмосфере.

Литература

Багров Н.А. Аналитическое представление последовательности метеорологических полей посредством естественных ортогональных составляющих. – "Труды ЦИП",1959, вып.74, с.3–76.

Гасюков П.С. О методе разложения по естественным составляющим совокупности полей нескольких гидрометеорологических элементов. Океанологические исследования в Атлантике. – "Труды АтлантНИРО",1972, вып.ХУШ, с.130–136.

Естественные составляющие метеорологических полей. Л., Гидрометеоиздат, 1969, 198 с. Авт.: А.В.Мещерская, Л.В.Руховец, М.И.Юдин, Н.И.Яковлева.

Н и к о л а е в Ю.В. Преобразование информации в приложении к задачам гидрометеорологии. М., Гидрометеоиздат, 1969, 64 с.

О б у х о в А.М. О статистически ортогональных разложениях эмпирических функций. - "Известия АН СССР", сер. геофизическая, 1960, №3, с.432-439.

С р е д н м е с я ч н а я температура воды, воздуха и разностей температур вода - воздух в Северной Атлантике (1948-1968). Составитель А.Н.Крындин, М., изд. ГУ ГМС при СМ СССР, 1968,

On joint decomposition of the fields of water and air temperature by statistically orthogonal functions

P.S.Gasyukov

S u m m a r y

The method of joint decomposition of several hydrometeorologic fields by statistically orthogonal functions leads the problem to decomposition of the vector field, the components of which are initial scalar fields.

The method is tested with joint decomposition of the fields of water and air temperature. The numerical experiment has indicated a satisfactory convergence of the method and its economy as compared to the traditional methods. It may be used for solving problems of reset and forecast of physical conditions in the ocean and atmosphere.