Том
СХIУ

Труды Всесоюзного научно-исследовательского
института морского рыбного хозяйства
и океанографии (ВНИРО)

1976

УДК 551.46.062 : 681.3

АППРОКСИМАЦИЯ ОКЕАНОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ МНОГОЧЛЕНАМИ В СВЯЗИ С ЗАДАЧАМИ ПРОГНОЗА И СГЛАЖИВАНИЯ

З.И.Кизнер, Г.И.Козубская,
В.И.Пономарев, Э.И.Черный

С задачей аналитического представления реальных двумерных полей часто приходится сталкиваться в океанологических исследованиях при обработке результатов измерений. При этом с математической точки зрения порой несущественна природа такой информации. Двумерное дискретное поле может представлять собой результат измерений температуры морской воды на некотором горизонте, толщины перемешанного слоя, глубины залегания термоклина и т.д. - т.е. характеристик, существенно зависящих от времени. В то же время под двумерным полем можно понимать такую практически неизменную характеристику,как рельеф дна моря или океана. В обоих случаях принцип решения задачи аналитического представления таких полей один. С этой задачей также близко связана задача временно́й экстраполяции физических полей (Кизнер и др., 1972), которая, естественно, может быть поставлена лишь для полей первого типа.

Особо ценно использование методов аналитического представления и экстраполяции физических полей в условиях дефицита исходной информации, складывающихся прежде всего в глубоководных районах морей и океанов. Пожалуй, единственная глубоководная характеристика, информация о которой более или менее удовлетворительна, - это рельеф дна. Но и в этом случае методы аналитического представления полей незаменимы при решении задачи сглаживания рельефа дна (такая задача встает при численных расчетах океанической и в первую очередь глубоководной циркуляции).

Общая постановка задачи аналитического представления реальных двумерных полей и способ ее решения даны в работе З.И.Кизнера и др.(1972). Идея метода такова. По данному множеству точек $\mathfrak{M} = \{(x_i, y_i);\ i = 1, \dots, N\}$ и множеству одночленов $\{x^p y^q\}$ строится система многочленов, ортогональных на $\mathfrak{M}$. Затем по заданному дискретному полю $z_i = z(x_i, y_i)$, представляющему значения исследуемого гидрометеорологического параметра $z(x,y)$ на множестве $\mathfrak{M}$, строится наилучший аппроксимирующий многочлен $S(x,y)$, среднее квадратическое отклонение которого от $z(x,y)$,

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} [z_i - \zeta(x_i, y_i)]^2}, \tag{I}$$

минимально.

Здесь, следуя Вейсфельду (Weisfeld, 1959), мы опишем модифицированный метод ортогонализации последовательности одночленов $\{x^p y^q\}$, приводящий буквально к той же ортогональной системе многочленов, что и общий метод, но учитывающий специфичный вид исходной системы функций (т.е. одночленов). Именно этот метод реализован в программе.

Сначала необходимо установить отношение порядка в системе одночленов $\{x^p y^q\}$, т.е. последовательность их пересчета. Запишем исходную систему одночленов в виде матрицы

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & x \arrow[dl] & x^2 \arrow[dl] & x^3 \arrow[dl] & \dots\dots & x^k \\
y \arrow[urr] & xy \arrow[dl] & x^2y \arrow[dl] & x^3y & \dots & x^ky \\
y^2 \arrow[uurrr] & xy^2 \arrow[dl] & x^2y^2 & x^3y^2 & \dots & x^ky^2 \\
y^3 \arrow[uuurrrr, dashed] & xy^3 & x^2y^3 & x^3y^3 & \dots & x^ky^3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
y^l & xy^l & x^2y^l & x^3y^l & \dots & x^ky^l
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Естественно потребовать, чтобы способ пересчета обеспечивал "равноправное представительство" степеней x и y в упорядоченной системе одночленов. Кроме того, нужно, чтобы в упорядоченной системе одночлены низшей степени предшествовали одночленам более высокой степени. В этом случае для представления наилучшего многочлена потребуется практически минимальное число одночленов (и к тому же минимальной степени).

Для этого вполне подходит "треугольный" пересчет, показанный стрелками на матрице (2) и приводящий к последовательности одночленов

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, x^4, \ldots \tag{3}$$

Такой способ введения порядка в системе одночленов $\{x^p y^q\}$ можно формализовать следующим образом (Weisfeld, 1959). Каждому одночлену $x^p y^q$ поставим в соответствие пару чисел (p, q), называемую биидексом. В дальнейшем бииндексы (как и обычные индексы) будем обозначать латинскими буквами, например $i=(i_1, i_2)$, $j=(j_1, j_2)$; бииндекс (0,0) будем обозначать символом 0. На множестве бииндексов определим функцию $\sigma(i)=i_1+i_2$ и введем порядок в этом множестве, полагая

$$(i<j) \equiv (\sigma(i)<\sigma(j)) \vee (\sigma(i)=\sigma(j)) \wedge (i_2<j_2).$$

Иначе говоря, бииндекс j следует за i , если $\sigma(i)<\sigma(j)$ или если одновременно $\sigma(i)=\sigma(j)$ и $i_2<j_2$. Введенное таким образом отношение порядка в множестве бииндексов индуцирует порядок и в множестве одночленов $\{x^p y^q\}$, "выстраивающий" их в последовательность (3).

К этой последовательности применим модифицированный процесс ортогонализации. Будем для краткости обозначать элементы последовательности (3) символами φ_j , где j – соответствующий одночлену бииндекс. Элементы ортогональной системы многочленов будем обозначать через ψ_j. В рекурентных формулах, приводимых ниже, каждый ортогональный многочлен ψ_j (при $j>0$) определяется через некоторый предшествующий ему многочлен $\psi_{\hat{j}}$, помноженный на x или y в зависимости от j (бииндекс $\hat{j}$ также определяется через j).

Итак, если $j=(j_1, j_2)$, определим

$$\hat{j} = j(j) = \begin{cases} (j_1, j_2 - 1) & \text{при } j_2 \neq 0, \\ (j_1 - 1, j_2) & \text{при } j_2 = 0, \end{cases}$$

$$d = d(j) = \begin{cases} 2 & \text{при } j_2 \neq 0, \\ 1 & \text{при } j_2 = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Обозначим $x_1 = x$, $x_2 = y$. Теперь легко определить рекуррентный процесс ортогонализации:

$$\psi_0 = \varphi_0 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\psi_j = x_d \psi_j - \sum_{m<j} \alpha_j^m \psi_m , \qquad (5)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

В формулах (5)

$$\alpha_j^m = \frac{\langle x_d \psi_{\hat{j}}, \psi_m \rangle}{\|\psi_m\|^2} . \qquad (6)$$

Отметим еще раз, что здесь $0, j, \hat{j}, m$ – бииндексы. Однако для простоты их можно рассматривать как обычные индексы (практически мы так и поступаем в програме) – это не изменит смысла формул (5) и (6). Следует лишь иметь в виду, что только в этом случае индекс является номером соответствующего элемента последовательности, т.е. указывает количество элементов последовательности, предшествующих данному. Кроме того, в этом случае запись $j = (j_1, j_2)$ нужно понимать в том смысле, что номеру j соответствует бииндекс (j_1, j_2). Исходную систему одночленов считаем линейно независимой на множестве $\mathfrak{M}$, так как иначе формула (6) теряет смысл (Кизнер и др., I972).

Теперь, когда системы одночленов и ортогональных многочленов "выстроены" в виде последовательностей, можно дать достаточно строгую постановку задачи.

Пусть на множестве $\mathfrak{M}$, состоящем из точек с координатами (x_i , y_i) ($i = 1, \ldots, N$), задана функция $z(x_i, y_i) = z_i$. Рассмотрим множество многочленов вида

$$\eta = \sum_{j=0}^{L} c_i \psi_i . \qquad (7)$$

Здесь j – обычный индекс; c_j – числовые коэффициенты в разложении многочлена η по системе ортогональных многочленов $\{\psi_j\}$; L – число, на единицу меньшее числа элементов в этом разложении, называемое далее длиной многочлена η . Среди многочленов вида (7) нужно найти многочлен ζ , среднее квадратичное отклонение которого (I) от функции Z на множестве $\mathfrak{M}$ минимально.

Существование и единственность решения поставленной задачи доказаны в работе З.И.Кизнера и др. (1972). Коэффициенты C_j , соответствующие наилучшему многочлену ζ , определяются равенствами

$$C_j = \frac{\langle Z, \psi_j \rangle}{\|\psi_j\|^2}, \tag{8}$$

где $j \leqslant L$, а символом $\langle\ ,\ \rangle$ обозначено скалярное произведение на множестве $\mathfrak{M}$ (Кизнер и др., 1972).

Формулы (6) и (8) дают коэффициенты разложения ортогональных многочленов и наилучшего многочлена по системе ортогональных многочленов. При пересчете их по системе одночленов получим другие соотношения. Если ортогональный многочлен представлен в виде

$$\psi_j = \sum_{l \leqslant j} A_{jl} \varphi_l ,$$

а наилучший многочлен – в виде

$$\zeta = \sum_{l=0}^{L} B_l \varphi_l ,$$

то коэффициенты A_{jl} вычисляются по рекуррентным формулам

$$A_{oo} = 1,$$

....

$$\begin{cases} A_{jl} = A_{\hat{j}\tilde{l}} - \sum\limits_{m<j} \alpha_j^m A_{ml}, \\ l<j, \end{cases}$$

....

где $\hat{j}$ определяется равенством (4)

$$\tilde{l} = \tilde{l}(j) = \begin{cases} (l_1, l_2 - 1) & \text{при } j_2 \neq 0, \\ (l_1 - 1, l_2) & \text{при } j_2 = 0, \end{cases}$$

а коэффициенты B_l наилучшего многочлена – по формуле

$$B_l = \sum_{j=0}^{L} C_j A_{jl} .$$

Имея наблюдения поля по времени можно построить многочлены наилучшего приближения для каждого момента времени наблюдения, а затем каким-либо способом проэкстраполировать коэффициенты многочлена на некоторый будущий момент времени. В настоящей работе в качестве первого шага используется простейший вид экстраполяции – линейная. Линейной экстраполяцией определяются значения коэффициентов C_j x) на будущий момент времени по двум системам коэффициентов, полученным в разложениях двух многочленов, аппроксимирующих наблюденное поле за два предыдущих момента времени.

Программа, реализующая предложенный метод, написана на АЛГОЛе для транслятора АЛГАМС, МЭИ-3 (ЭВМ "Минск-22"). Программа позволяет, во-первых, аппроксимировать заданное поле многочленом наилучшего приближения в заданном интервале степеней и рассчитывать значения аппроксимирующего многочлена в узлах прямоугольной сетки, и, во-вторых, аппроксимировать два заданных поля многочленами наилучшего приближения выбранной степени, экстраполировать по времени коэффициенты найденных многочленов и рассчитывать значения экстраполированного поля в узлах прямоугольной сетки.

Аппроксимация осуществляется следующим образом. Задаются точность аппроксимации $\varepsilon = \varepsilon_o$ и допустимые границы L, т.е. L_{min} и L_{max}; кроме того, задается число Δ – так называемый шаг по точности. Ищется многочлен наименьшей возможной длины, для которого $\delta \leq \varepsilon$ (δ – среднее квадратичное отклонение этого многочлена от функции Z на множестве заданных точек). Если такого многочлена нет (т.е. $\delta > \varepsilon$ и при $L = L_{max}$), ε увеличивается на Δ и поставленная задача решается снова. Процесс продолжается до тех пор, пока не определятся ε и соотвествующее ему минимальное L, для которого $\delta \leq \varepsilon$. Используется стандартная программа из библиотеки ФОРТРАНа для ЭВМ БЭСМ-6 ("Многочлены с наименьшим квадратичным отклонением ....", 1971). По расчетным значениям аппроксимированного или экстраполированного поля программа строит его изолинии в заданных интервалах.

Задача численного эксперимента заключается в изучении возможностей программы. Нужно было прежде всего выяснить,

---

x) С вычислительной точки зрения целесообразнее экстраполировать коэффициенты наилучшего многочлена по системе ортогональных многочленов (C_j), а не коэффициенты в разложении по системе одночленов (B_j), так как при переходе от C_j к B_j может появиться вычислительная ошибка.

применима ли программа (а значит и разработанная теория) для аппроксимации реальных гидрологических полей, и определить класс полей, для работы с которыми программа пригодна. Кроме того, необходимо было установить, насколько возрастает точность аппроксимации δ (I) по мере увеличения длины наилучшего многочлена, т.е. количества входящих в него одночленов из последовательности (3). Далее следовало определить время, потребное для решения задачи при различных длинах наилучшего многочлена (очевидно, это время должно ощутимо возрастать по мере увеличения длины многочлена). Наконец, нужно было выяснить возможность использования метода линейной экстраполяции для прогноза реальных полей.

Имея в виду перечисленные выше задачи, мы выбрали два вида полей: так называемое гладкое поле α - глубину перемешанного слоя в январе I968 г. в Тихом океане (к юго-востоку от Японских островов), измеренную в футах, и негладкое поле β - температуру на поверхности океана в декабре I967 г. (в том же районе) в $^{\circ}F$. Данные снимались с факсимильных карт на 50 произвольно расположенных в выбранном прямоугольнике точек путем линейной интерполяции (рис.I). На карте была выбрана система координат (с определенным масштабом).

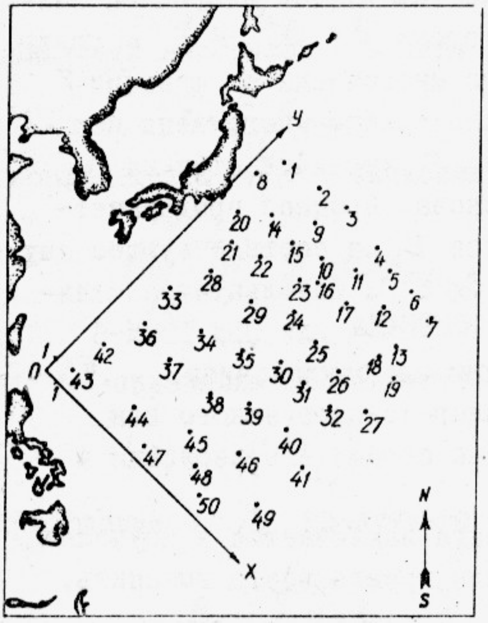

Рис.I. Исходное множество точек

По результатам расчетов строились картины изолиний с теми же шагами, что и на соответствующих картах, т.е. для глубины перемешанного слоя - через I00 фт (I00, 200, 300, 400 фт и т.д.), а для поля температуры - через 5° (50°, 55°, 60°.... и 83° - пунктиром). Полученные таким путем карты сравнивались с исходными (в случае аппроксимации) или с картой, представляющей реальное поле в определенный момент времени (в случае экстраполяции).

Для проверки качества аппроксимации были использованы карты глубины перемешанного слоя (поле α) на I5 января (рис.2) и поверхностной температуры (поле β) на I6 декабря (рис.3а).

Для проверки экстраполяции поля β были использованы карты за I8 и 20 декабря (см.рис.3б, в); экстраполяция проводилась на 22 декабря (см.рис.3г).

Линейная интерполяция, при помощи которой информация снималась на множество точек $\mathfrak{M}$,искажает реальное поле,что особенно заметно в случае негладкого поля. Поэтому при сравнении карт, полученных на основании расчетов, с исходными картами положительным результатом можно считать уже их качественное соответствие.

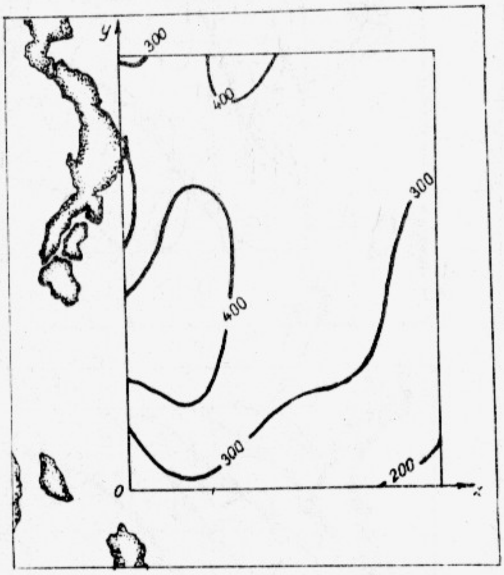

Рис.2. Глубина перемешанного слоя I5 января I968 г.(гладкое поле α)

Кроме того, аппроксимация реального поля многочленом приводит к сглаживанию исходного поля, что тоже нужно учитывать при сравнении полученных карт с исходными.

Эксперимент по аппроксимации показал, что время, затрачиваемое на счет по программе, сильно возрастает по мере увеличения $NS = L + 1$ (NS равно количеству входящих в многочлен одночленов). Так, при $NS = 6$ тратится 5 мин., при NS =I0 - уже 30 мин.,а при NS = I5 - более полутора часов.В то же время точность аппроксимации δ меняется мало: например, для поля α при изменении NS от I0 до I5 δ варьирует от 22,5 до I7,9 фт (при перепаде значений аппроксимируемого поля от I50 до 400 фт), а для поля β при изменении NS от 6 до I5 δ - от 3^0 до $2,7^0 F$ (перепад значений поля от 60^0 до $85^0 F$). Понятно поэтому, что аппроксимация при NS =I5 почти не имеет преимуществ перед аппроксимацией при NS =I0 (это видно и из сравнения рисунков 2, 4, 5, а также 3, 6, 7), зато гораздо менее экономична с точки зрения затрачиваемого машинного времени.

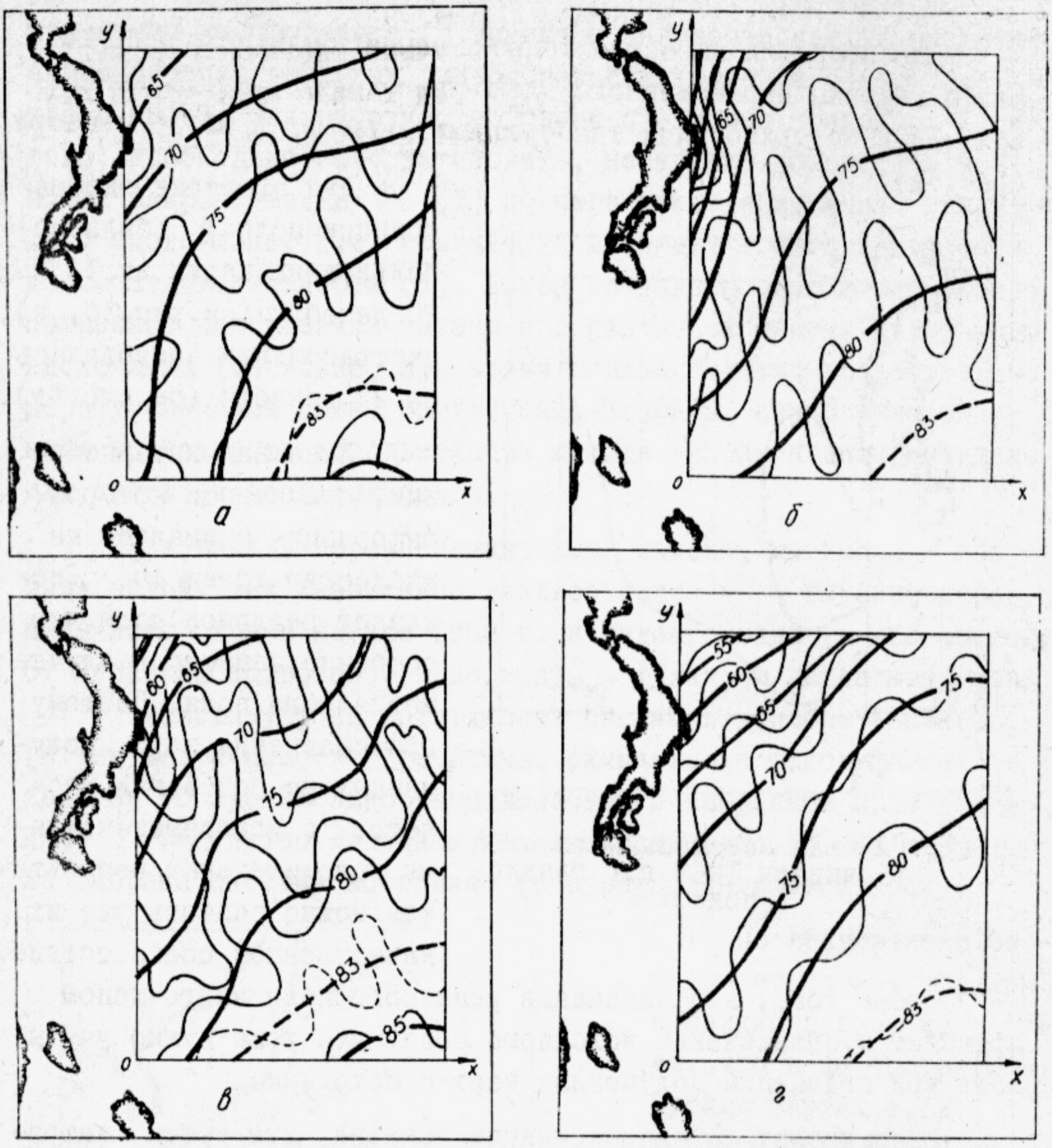

Рис.3. Температура на поверхности океана в декабре I967 г. (негладкое поле β):
а - I6/ХП; б - I8/ХП; в - 20/ХП; г - 22/ХП

Значения NS =I0 и NS =I5 выбраны не случайно: при NS =I0 наилучший многочлен представляет собой полный многочлен третьей степени (т.е. в него входят все одночлены не более третьей степени), а при NS =I5 - четвертой степени. Если поле одинаково гладко как по x , так и по y , то естественно требовать, чтобы в выражение наилучшего многочлена входили "симметричные" степени x и y , например, x^2y и xy^2 , x^3 и y^3 , x^3y^2 и x^2y^3 и т.д. Именно по этой причине разумно задавать NS =I, 3, 6, I0, I5 и т.д. В то же время ясно, что при $NS \leqslant 6$ наилучший многочлен будет давать слишком гладкое поле (изолиниями такого многочлена при NS =6 служат кривые второго порядка: эллипсы, гиперболы, параболы и т.д.), т.е. аппроксимация при таких NS имеет ограниченное применение.

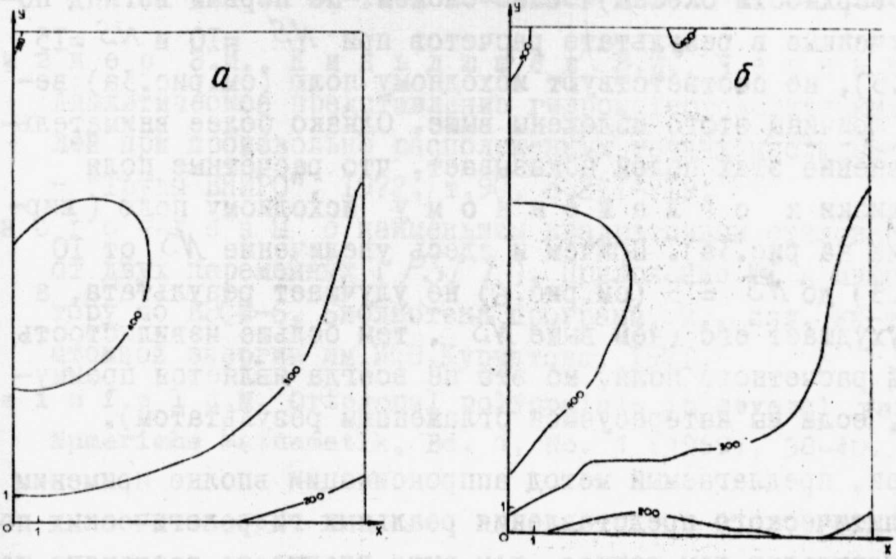

Рис.4. Результат аппроксимации поля глубины перемешанного слоя за I5 января при NS =I0 (а) и при NS =I5(б)

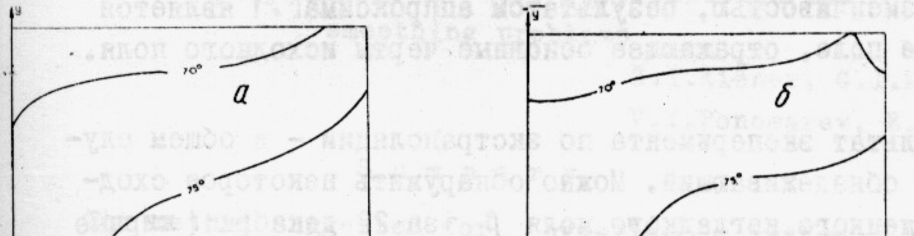

Рис.5. Результат аппроксимации поля температуры за I6 декабря при NS =I0 (а) и при NS =I5 (б)

Из сказанного ясно, почему мы остановились на NS =I0 и I5.

Сравнение рис.2 и 4 показывает, что предлагаемый метод вполне применим при NS =I0 для аппроксимации гладких полей (типа глубины перемешанного слоя, глубины залегания термоклина и т.д.). Судя по всему, увеличение NS до I5 в этом случае вряд ли оправдано (см.рис.2, 4 и 5).

Вопрос об аппроксимации негладких полей (типа температуры на поверхности океана) более сложен. На первый взгляд поля, полученные в результате расчетов при NS =I0 и NS =I5 (см.рис.5), не соответствуют исходному полю (см.рис.3а);вероятные причины этого изложены выше. Однако более внимательное сравнение этих полей показывает, что расчетные поля очень близки к сглаженному исходному полю (жирные линии на рис.3а). Причем и здесь увеличение NS от I0 (см.рис.5) до NS =I5 (см.рис.6) не улучшает результата, а скорее ухудшает его (чем выше NS , тем больше извилистость изолиний расчетного поля, но это не всегда является преимуществом, если мы интересуемся сглаженным результатом).

Итак, предлагаемый метод аппроксимации вполне применим для аналитического представления реальных гидрологических полей, и результат тем точнее, чем выше гладкость реального поля. Если исходное (реальное) поле обладает заметной мелкомасштабной изменчивостью, результатом аппроксимации является сглаженное поле, отражающее основные черты исходного поля.

Результат эксперимента по экстраполяции – в общем случае менее обнадеживающий. Можно обнаружить некоторое сходство сглаженного негладкого поля β за 22 декабря (жирные линии на рис.3г) с экстраполированным полем.

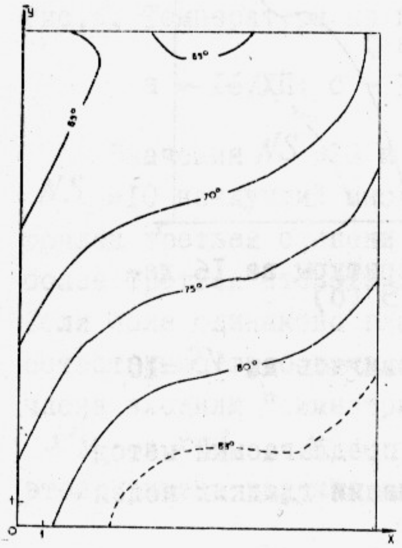

Рис.6. Результат линейной экстраполяции поля глубины перемешанного слоя на I8 января (NS =I0).

Весьма возможно, что статистическая экстраполяция по длинному ряду наблюдений приведет к лучшему результату.

Литература

Кизнер З.И., Киньдюшев В.И., Черный Э.И. Аналитическое представление гидрометеорологических полей при произвольно расположенных точках наблюдений. - "Труды ВНИРО", 1972, т.90, с.2II-2I9.

Многочлены с наименьшим квадратичным отклонением от двух переменных (*PSI 1*). Приложение №I к информатору по БЭСМ-6. Библиотека программ. М., изд. ин-та атомной энергии им.И.В.Курчатова, I97I.

Weisfeld,M. Ortogonal polynomials in several variables Numerishe Mathematik, Bd. 1, No. 1 (1959), 38-40.

Approximation of ocenologic fields with polynomials in view of prediction and smoothing problems

Z.I.Kizner, G.I.Kozubskaya,
V.I.Ponomarev, E.I.Cherny

Summary

The method suggested for ordering a system of mononomials and modification of the method of orthogonalization of the sequence of mononomials simplifies implementation of the procedure of arranging the best polynomial at the computer which approximates the initial two-dimensional field by least squares. Field values are assigned in points arranged on the plane at random.

As a result of computing experiments on approximation, smoothing out and linear extrapolation of real oceanic fields, estimates of precision of solutions of problems and corresponding operational computer time at various "lengths" of approximating polynomials have been obtained. Classes of oceanographic fields are described. The method suggested provides satisfactory results with approximation and smoothing of the fields.