

УДК 581.526.32:551.465.8:517.925(26.04+262.54)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
ТРАНСФОРМАЦИИ БИОГЕННЫХ ВЕЩЕСТВ
ТАГАНРОГСКОГО ЗАЛИВАЮ.А.Домбровский, Е.А.Чернус
(НИИМ и ПМ СКНЦ ВШ)

Таганрогский залив - водоем чрезвычайно высокой рыбопродуктивности. В нем сосредоточены основные запасы ценных промысловых рыб Азовского моря, что обусловлено низкой соленостью залива, большой концентрацией биогенных веществ, которые приносятся со стоком Дона, высокой скоростью продуцирования органического вещества.

В предлагаемой работе делается попытка построить математическую модель, описывающую процессы синтеза органического вещества фитопланктоном и последующей трансформации биогенных веществ.

Описание модели. На первом этапе моделирования предполагается, что основным биогенным веществом, лимитирующим развитие фитопланктона, является азот. Круговорот биогенных веществ состоит из трех основных процессов: продуцирования фитопланктоном органического вещества из неорганического, отмирания и распада живых организмов и минерализации органических веществ. Из факторов, существенно влияющих на скорость протекания этих процессов, важнейшими являются температура (T) и соленость (S) водоема. Считается, что содержание азота сбалансировано, т.е. выход азота из системы компенсируется его поступлением. Влияние инсоляции на фотосинтез не учитывается вследствие ее обильности в Таганрогском заливе. Введем следующие обозначения:

- X_1 - средняя удельная биомасса фитопланктона (вмг/м^3) Таганрогского залива в пересчете на азот;
 X_2 и X_3 - средние концентрации органического и минерального азота (вмг/м^3).

Среднее содержание азота в сухом веществе фитопланктона было принято равным 5% /2/.

Моделью служит система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = k_1(T)\varphi(x_1, x_3) - k_2(S)x_1 \\ \dot{x}_2 = k_2(S)x_1 - k_1(T)x_2 \\ \dot{x}_3 = k_3(T)x_2 - k_1(T)\varphi(x_1, x_3) \end{cases}, \quad (I)$$

где $\varphi(x_1, x_3)$ - скорость продуцирования фитопланктоном органического вещества, которая предполагается зависящей от плотности самого фитопланктона и концентрации минеральных веществ;

$k_1(T)$ - коэффициент продуцирования, зависящий от температуры;

$k_2(S)$ - коэффициент смертности фитопланктона, зависящий от солености;

$k_3(T)$ - скорость минерализации органического вещества в зависимости от температуры.

В модели использовались различные конкретные виды функции

а) $\varphi(x_1, x_3) = 1 - e^{-\alpha \frac{x_3}{x_1}}$ /4/;

б) $\varphi(x_1, x_3) = x_1 \min\{k, \dot{x}_3 R\}$ /5 и 7/,

где R - максимальная удельная скорость фотосинтеза.

Виды зависимостей коэффициентов от внешних факторов выбирались на основании качественной и количественной информации о влиянии внешних факторов на интенсивности соответствующих процессов, функциональную зависимость предполагали кусочно-линейной (рис.1) /6/.

Таким образом, полностью описана общая структура модели. Следующий этап моделирования, - выбор правильной величины параметров, обеспечивающих адекватность модели реальному объекту, - обычно называют идентификацией модели. При идентификации были использованы данные по динамике фитопланктона и биогенных веществ за 1952-1973 гг., представленные сотрудниками АХНИИРХ А.Я.Алдакимовой и Г.Д.Макаровой.

Описанная модель реализована на ЭВМ БЭСМ-4. Интегрирование производилось методом Эйлера на временном интервале 7 месяцев - с апреля по октябрь. Решения системы, т.е. расчетная динамика фитопланктона и биогенных веществ, получены в виде графиков с пятидневным шагом (рис.2).

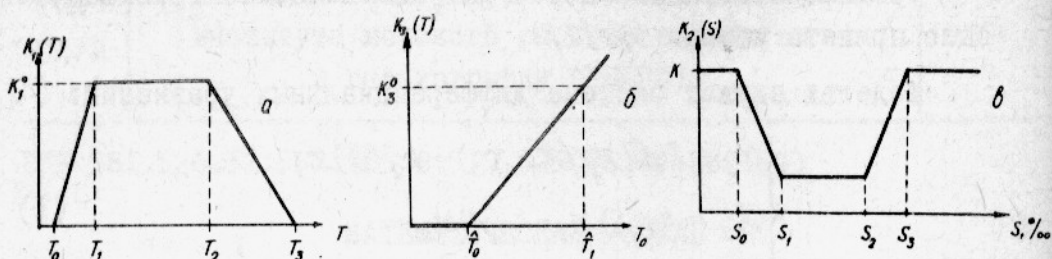


Рис. I. Зависимости:

а - коэффициента продуцирования от температуры воды (T_0, T_3) - температурный интервал, в котором происходит развитие фитопланктона, $[T_1, T_2]$ - интервал оптимальных температурных условий; б - скорости минерализации органического вещества от температуры (T_0 - температура, при которой начинается минерализация, T_1 - температура, при которой скорость минерализации достигает величины K_3^0 , при расчетах принято $T_0 = 0^0$; $T_1 = 10^0$);

в - коэффициента смертности фитопланктона от солености ($[S_0, S_3]$ - интервал солености, в котором возможно развитие фитопланктона, $[S_1, S_2]$ - интервал оптимальной дл. фитопланктона солености)

Качественное исследование поведения траектории системы (I)

Для проверки адекватности модели, а также для выбора правильных величин параметров системы, необходимо знать, как ведут себя решения системы уравнений при постоянных значениях коэффициентов.

Исследование осуществляется при некоторых естественных ограничениях на вид функции $\varphi(x_1, x_3) : \varphi(x_1, x_3) = x_1 f(x_1, x_3)$, причем, $f(x_1, x_3)$ возрастает по x_3 и является невозрастающей функцией x_1 (функции (а) и (б) входят в этот класс); $f(x_1, 0) = 0$.

Фазовым пространством сист. (I) является положительный квадрант: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. Вначале изучается поведение траекторий системы

$$(1) \begin{cases} \dot{x}_1 = k_1 x_1 f(x_1, x_3) - k_2 x_1 = P(x_1, x_3) \\ \dot{x}_3 = -k_1 x_1 f(x_1, x_3) + k_3 (C - x_1 - x_3) = Q(x_1, x_3) \end{cases} \quad (I')$$

полученной из (I) исключением переменной x_2 с помощью первого интеграла системы:

$$x_1 + x_2 + x_3 = C.$$

Фазовая картина решений (I') является проекцией на плоскость x_2, x_3 траекторий системы (I), лежащих в плоскости $x_1 + x_2 + x_3 = C$. В системе не может возникнуть периодических колебаний, так как (I) не имеет замкнутых траекторий, и вообще в области $x_1 + x_3 \leq C$ нет замкнутых контуров, целиком составленных из траекторий (I') (критерий Дюлака /1/).

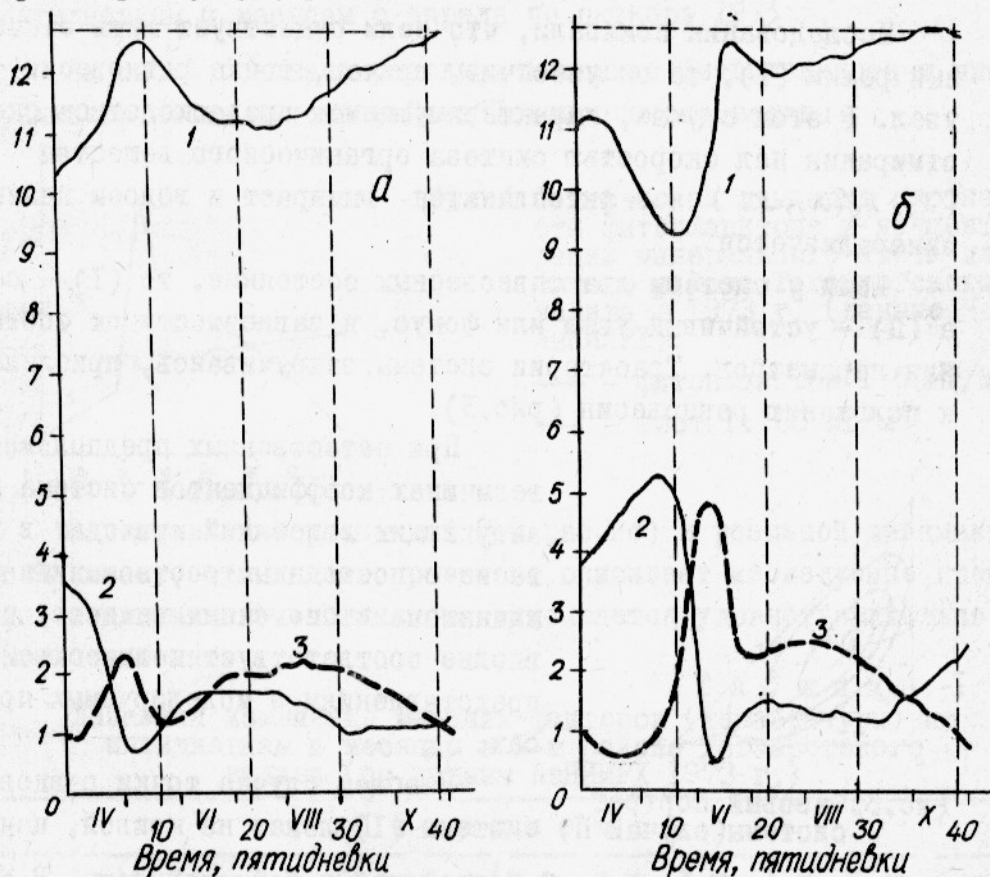


Рис. 2. Расчет динамики фитопланктона и биогенных веществ:

а - для условий характерного года по модели с параметрами:

$$K_1^0 = 10 \frac{1}{5 \text{дн.}}; K_2^0 = 3 \frac{1}{5 \text{дн.}}; K_3^0 = 0,05 \frac{1}{5 \text{дн.}};$$

$$T_0 = 4^\circ; T_1 = 12^\circ; T_2 = 20^\circ; T_3 = 30^\circ; S_0 = 0\text{‰}; S_1 = 2\text{‰}; S_2 = 6\text{‰}; S_3 = 9\text{‰}.$$

б - для условий 1973г. по модели с параметрами:

$$K_1^0 = 10 \frac{1}{5 \text{дн.}}; K_2^0 = 3 \frac{1}{5 \text{дн.}}; K_3^0 = 0,05 \frac{1}{5 \text{дн.}};$$

$$T_0 = 5^\circ; T_1 = 17^\circ; T_2 = 27^\circ; T_3 = 30^\circ; S_0 = 2\text{‰}; S_1 = 9\text{‰}; S_2 = 12\text{‰}; S_3 = 17\text{‰}.$$

I - органический, 2 - минеральный азот, 3 - фитопланктон

Система имеет не более двух стационарных решений:

(I) $x_1 = 0, x_3 = c$ и (II) $-(x_1^*, x_3^*)$, которое находят из

$$\begin{cases} f(x_1, x_3) = \frac{k_2}{k_1} \\ x_3 = \frac{ck_3 - x_1(k_2 + k_3)}{k_3} \end{cases} \quad (2)$$

(I) существует всегда, а (II) — лишь при таких K_1 и K_2 , при которых $k_1 f(x_1, x_3) > k_2$ в некоторой окрестности точки $(0, c)$ на плоскости x_1, x_3 .

Исследования показали, что если существует лишь стационарный режим (I), то он устойчив, причем, точка равновесия — типа узел. В этом случае, характеризующемся превосходством скорости отмирания над скоростью синтеза органического вещества ($k_2 > k_1 f(x_1, x_3)$), фитопланктон вымирает и водоем полностью минерализуется.

Если у системы два равновесных состояния, то (I) — седло, а (II) — устойчивый узел или фокус, в зависимости от соотношения параметров. Траектории системы, закручиваясь, приближаются к положению равновесия (рис. 3).

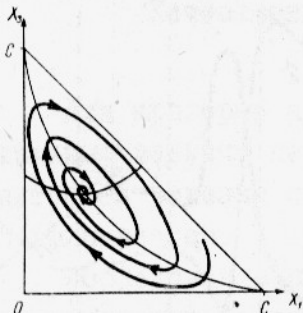


Рис. 3. Фазовый портрет системы (случай II)

При естественных предположениях о величинах коэффициентов система после затухающих колебаний приходит в равновесие с постоянным соотношением фитопланктона и биогенных веществ, что вполне соответствует количественным представлениям о моделируемых процессах.

В общем случае точки равновесия системы (I) лежат на кривой, начинающейся в $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и уходящей в бесконечность. В случаях функций Ивлева и Вольтерра-Полетаева эта линия — прямая.

Поведение решений используемой для моделирования реальных процессов систем дифференциальных уравнений не должно качественно меняться при малых изменениях параметров и функций, входящих в систему. Для рассматриваемой модели эти условия выполнены.

Результаты расчетов по модели

Для проверки правильности работы модели была рассчитана динамика фитопланктона и биогенных веществ по данным о температуре и солености характерного года (см.рис.2). На графике динамики фитопланктона четко выделяются два максимума: острый весенний (конец апреля) и растянутый летний (июль, август).

Затем на модели были симитированы конкретные условия по пятидневкам и месяцам с апреля по октябрь 1973 г.

На рис.4 показана реальная динамика фитопланктона и минерального азота пятого района Таганрогского залива.

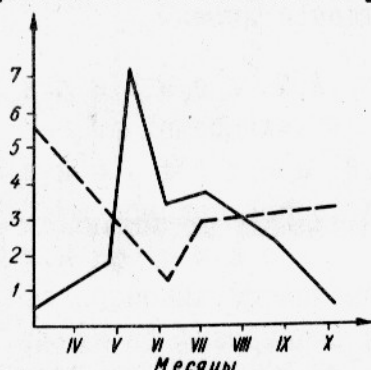


Рис.4. Фактическая динамика плотности фитопланктона и концентрации минерального азота для пятого района Таганрогского залива в 1973 г. (данные АЗНИИРХ):

— - фитопланктон I:50мг/м³;
 --- - азот I:100 мг/м³

Сопоставление расчетной (см.рис.2б) и реальной динамики показывает, что модель правильно описывает исследуемые процессы, а динамика фитопланктона описывается удовлетворительно и количественно.

Т а б л и ц а I
 Динамика изменения внешних факторов (температуры) по пятидневкам и месяцам в 5-м районе Таганрогского залива (по данным АЗНИИРХ 1973 г.)

П я т и д н е в к и											
I-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	I-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я
А п р е л ь						М а й					
6,9	7,8	8,4	9,4	10,5	11,5	12,6	13,7	14,8	15,9	17,0	18
Среднее за апрель 10,90						Среднее за май 10,95					
И ю н ь						И ю л ь					
19,1	20,1	21,2	22,7	22,2	22,8	23,4	23,8	23,3	24,0	23,7	23,6
Среднее за июнь 21,0						Среднее за июль 21,29					
А в г у с т						С е н т я б р ь					
22,6	22,2	21,7	21,0	20,5	19,6	18,9	18,2	17,7	16,8	16,1	15,4
Среднее за август 21,81						Среднее за сентябрь 17,50					
О к т я б р ь											
14,6	13,8	13,0	12,2	11,2	10,2						
Среднее за октябрь 12,19											

Исследование зависимости средней биомассы фитопланктона и концентрации биогенных веществ от внешних факторов. Исследование чувствительности решений по коэффициентам

При помощи модели можно проследить изменения средних величин плотности фитопланктона и концентраций биогенных веществ при изменении уровня солености залива, а также зависимость этих величин от температурных условий. Для вычисления средних значений учитывается, что средние значения решений за большое время совпадают с точками равновесия системы, которые вычисляются по следующим формулам

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{ck_1 - k_2}{k_1} \cdot \frac{k_3}{k_2 + k_3} \\ \bar{x}_2 = \frac{ck_1 - k_2}{k_1} \cdot \frac{k_2}{k_2 + k_3} \\ \bar{x}_3 = \frac{k_2}{k_1} \end{cases}$$

Зависимость указанных средних значений от солености показана на рис.5.

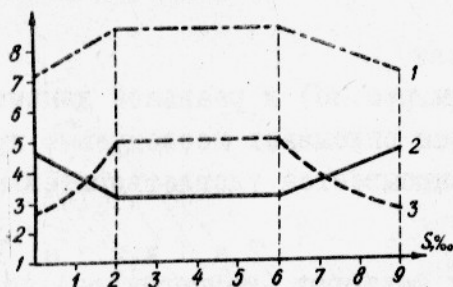


Рис.5. Рассчитанная по модели зависимость плотности фитопланктона от солености Таганрогского залива:
1 — органический;
2 — минеральный азот;
3 — фитопланктон

Важной характеристикой модели является чувствительность решений системы к изменению ее параметров, т.е. данные о том, насколько изменится динамика системы при вариациях ее коэффициентов (табл.2), которые показывают, что система довольно устойчива к вариациям коэффициентов.

Таблица 2

Изменение средних значений решений (в %) при изменении коэффициентов на 5%

Средние значения	Параметры			
	k_1	k_2	k_3	C
\bar{x}_1	2	6	5	7
\bar{x}_2	2	2	0	7
\bar{x}_3	5	5	0	0

З а к л ю ч е н и е

Использование для расчетов даже простейшей модели дает качественно верные и удовлетворительные с количественной точки зрения результаты.

Модель допускает усложнения и уточнения. Так, в модели может быть учтено поступление биогенных веществ со стоком Дона, выплывание их из залива и оседание на дно.

При увеличении размерности системы можно учесть также разнообразие видов фитопланктона и типов биогенных веществ.

Список использованной литературы

1. А н д р о н о в И.А., В и т т А.А., Х а й к и н С.Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959, 627 с.
2. В и н о г р а д о в В.П. Химический состав планктона. Труды биолог.лабор. АН СССР, 1930, т.1, 5 с.
3. В и н о г р а д о в а З.А. К познанию химического состава кормовых организмов и рыб Черного моря. Труды Совещания по физиологии рыб, 1958, 4 с.
4. И в л е в В.С. Экспериментальная экология питания рыб. М., Пищепромиздат, 1955, 329 с.
5. П о л е т а е в И.А. Модели Вольтерра "хищник - жертва" и некоторые их обобщения с использованием принципа Либиха.(Общ.Биол.), 1973, т.XXXIV, № 1, 8 с.
6. S y s t e m s analysis and simulation in ecology. Ed. B. Paten, Acad. Press, 1971.
7. V o l t e r r a, V. Leçons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie, Paris, 1931.

A mathematical model of transformation
of biogenic elements in the Bay of Taganrog

Yu.A. Dombrovsky

E.A. Chernus

S u m m a r y

A mathematical model of transformation of biogenic elements in the Bay of Taganrog is described. It is assumed that the turnover of biogenic elements includes three main processes: production of organic matter from inorganic matter, mortality and decomposition of live specimens and mineralization of organic matter. Transformation of nitrogen in the turnover is described with a system of differential equations. The relationship of the process intensity with temperature and salinity is expressed by coefficients of the equations which are assumed to be functions of environmental factors. The model is identified and computations made indicate that it describes qualitatively properly processes investigated. Besides, it depicts qualitatively and quantitatively the dynamics of phytoplankton.