Том CXXV | Труды Всесоюзного научно-исследовательского института морского рыбного хозяйства и океанографии (ВНИРО) | 1977

УДК 639.2.081.1.001.2

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ УПРУГИХ ТЕЛ ПРИ ТРЕНИИ

С. И. Полуляк

При исследовании ряда производственных процессов в рыбной промышленности часто возникает необходимость рассмотреть вопросы, связанные с контактированием и трением упругих тел и выявлением физической сущности этих явлений.

Так, А. В. Терентьев в своих трудах неоднократно касался проблемы взаимодействия рабочих органов обрабатывающих машин с телом рыбы. При исследовании взаимодействия некоторых элементов орудий лова с поверхностью рабочих органов средств механизации также важно знание явлений, возникающих при контактировании.

В большинстве случаев анализ этих явлений может быть сведен к рассмотрению контактирования двух плоских упругих тел при наличии сил трения на линии касания.

В работах Г. В. Колосова [1], Н. И. Мусхелишвили [2], Л. А. Галина [3] изложены основы плоской теории упругости на основе применения теории функции комплексного переменного и дано решение ряда задач.

Н. И. Мусхелишвили [2] в качестве примера дал решение задачи контактирования двух упругих тел (обобщенная плоская задача Герца) без учета сил трения. Однако разработанный им метод позволяет учесть влияние сил трения на процесс контактирования.

Л. А. Галин [3] наметил возможный путь решения указанной задачи, не приводя, однако, ее к окончательному виду.

В последнее время Н. И. Глаголев [4], изучая сопротивление перекатывания цилиндрических тел, рассмотрел упругое контактирование двух тел с учетом некоторых видов трения качения. Однако в связи с иной постановкой задачи полученные решения содержат значительное количество элементов, не относящихся к указанной теме, что затрудняет использование результатов этих исследований.

В данной статье изложено решение задачи контактирования двух плоских упругих тел с учетом сил трения на линии касания, при этом используются метод решения и условные обозначения работы [2].

Два упругих тела S_1 и S_2, близкие по форме к полуплоскости, соприкасаются вдоль участков ab их границы. Тело S_1 занимает нижнюю полуплоскость S^-, а тело S_2 — верхнюю полуплоскость S^+. Знаками 1 и 2 соответственно отмечены компоненты напряжений, смещений и упругие постоянные для нижнего и верхнего тел.

Известен вектор внешних сил P, сжимающих тела S_1 и S_2, и касательное напряжение, приложенное к точкам границы полуплоскости T. Указанные силы связаны между собой зависимостью $T=kP$, где k — коэффициент трения по Амонтону.

Ось Ox направлена по границе упругой полуплоскости, а ось Oy перпендикулярна к ней и проходит через точку касания до деформации тел или через середину участка ab после сжатия тел силой P.

Будем считать, что напряжения и вращения для S_1 и S_2 на бесконечности отсутствуют.

Тогда граничные условия принимают вид:

$$\begin{aligned} &T(t) = kP(t) \quad \text{на } ab, \\ &T(t) = P(t) = 0 \quad \text{вне } ab, \end{aligned} \tag{1}$$

где t — абсцисса точки на линии касания по оси Ox.

Суммарное давление одного тела на другое равно

$$P_0 = \int\limits_{ab} P(t)\,dt.$$

Суммарное касательное напряжение тогда будет

$$T_0 = kP_0.$$

Таким образом, заданы главные векторы $(X, У) = (T_0, -P_0)$ внешних сил, действующих на верхнее тело и уравновешенных реакцией нижнего тела

$$X_{1y}^{-} = T(t), \qquad Y_{1y}^{-} = -P(t). \tag{2}$$

Уравнения границ тел S_1 и S_2 до деформации будут

$$y = f_1(t), \qquad y = f_2(t).$$

После деформации обоих тел указанные выше уравнения принимают вид

$$f_1(t) + v_1^{-} = f_2(t) + v_2^{+},$$

где v — проекция на ось Oy.

Откуда

$$v_1^{-} - v_2^{+} = f(t) \text{ на } ab,$$

где $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$.

Теперь граничные условия для смещений в случае существования $f'(t)$ принимаем в виде

$$f'(t) = \left(v_1^{-}\right)' - \left(v_2^{+}\right)'. \tag{3}$$

Известно [2], что напряжения и смещения можно выразить через аналитическую функцию $\Phi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ следующими формулами:

$$Y_y - iX_y = \Phi(z) - \Phi(\bar{z}) + (z - \bar{z})\,\overline{\Phi'(z)}, \tag{4}$$

$$2\mu(u' + iv') = \varkappa\Phi(z) - \Phi(\bar{z}) - (z - \bar{z})\,\overline{\Phi'(z)}, \tag{5}$$

где $\varkappa$ — упругая постоянная;

μ — модуль сдвига.

Пусть $\Phi_1(z)$ — кусочно-голоморфная функция, соответствующая телу S_1, а $\Phi_2(z)$ — такая же функция для тела S_2, причем эти функции голоморфны и аналитически продолжимы по всей плоскости, за исключением отрезка ab, так как границы тел вне этого отрезка свободны от внешних напряжений.

Подстановка граничных условий (1) в уравнения (4), составленные для тел S_1 и S_2, дает выражение для обратных функций:

$$\overline{\Phi}_1(z) = \eta\Phi_1(z) \quad \text{и} \quad \overline{\Phi}_2(z) = -\eta\Phi_2(z), \tag{6}$$

где $\eta = \dfrac{1 - ik}{1 + ik}$.

Одновременно получаем уравнение для связи между функциями верхнего и нижнего тел:

$$\Phi_1(z) = -\Phi_2(z). \tag{7}$$

При выводе уравнений (6) и (7) для обоих тел были выполнены передельные переходы функций через границу, а также учитывалось, что z и $z \to 0$ при $y \to 0$ и что напряжения на бесконечности равны нулю.

Выражая граничные условия (3) для каждого тела отдельно в соответствии с уравнением (5), складывая и выполняя преобразования с учетом указанных выше действий, принимая во внимание равенства (6) и (7) и малую величину горизонтальных смещений, окончательно получаем:

$$\Phi_1^+(t) + g\Phi_1^-(t) = nf'(t), \tag{8}$$

где $g = \dfrac{\mu_2(\varkappa_1 + \eta) + \mu_1(1 + \eta\varkappa_2)}{\mu_2(1 + \eta\varkappa_1) + \mu_1(\varkappa_2 + \eta)}$, $\quad n = \dfrac{4i\mu_1\mu_2}{\mu_2(1 + \eta\varkappa_1) + \mu_1(\varkappa_2 + \eta)}$.

Уравнение (8) соответствует уравнению, полученному Н. И. Мусхелишвили для случая вдавливания штампа с учетом сил трения, и отличается от последнего значением коэффициентов при $\Phi^-(t)$ и $f'(t)$. Однако если перегруппировать указанные коэффициенты и отделить постоянные с индексом 2, т. е. граничные условия (3) принять для случая жесткого штампа, как $f'(t) = f_1(t)$, то

$$g = \frac{\varkappa + \dfrac{1 - ik}{1 + ik}}{1 + \varkappa\dfrac{1 - ik}{1 + ik}} = \frac{\varkappa + 1 + ik(\varkappa - 1)}{\varkappa + 1 - ik(\varkappa - 1)}, \quad n = \frac{4i\mu}{1 + \varkappa\dfrac{1 - ik}{1 + ik}} =$$

$$= \frac{4i\mu(1 + ik)}{\varkappa + 1 - ik(\varkappa - 1)},$$

и формула (8) совпадает с результатом, полученным Н. И. Мусхелишвили.

При отсутствии трения $k = 0$, $\eta = 1$, $g = 1$, $n = \dfrac{1}{K}$, где

$$K = \frac{1 + \varkappa_1}{4\mu_1} + \frac{1 + \varkappa_2}{4\mu_2}.$$

В этом случае уравнение (8) принимает вид

$$\Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t) = \frac{i}{K} f'(t)$$

и соответствует уравнению, полученному Н. И. Мусхелишвили для контактирования двух упругих тел без трения.

Уравнение (8) совпадает с выражением для неоднородной задачи линейного сопряжения Гильберта — Привалова, которая подробно исследована в работе [2].

Для решения задач линейного сопряжения кусочно-голоморфные функции находят согласно данным работы [2] в форме:

$$F(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int\limits_{ab} \frac{f(t)\,dt}{X_0^+(z)(t - z)} + X_0(z)P(z), \tag{9}$$

где функция $X_0(z) = (z - a)^{\gamma}(z - b)^{\gamma - 1}$, а $\gamma = \dfrac{\ln g}{2\pi i}$.

Для нашего случая

$$\gamma = \frac{1}{2} + \alpha, \text{ так как } g = e^{2\pi i\alpha}.$$

Тогда формула (9) для $\Phi(z)$

$$\Phi(z)=\frac{n}{2\pi i(z-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}}\int\limits_{ab}\frac{(t-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-t)^{\frac{1}{2}-\alpha}f'(t)}{t-z}dt+$$

$$+\frac{c_0}{(z-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}}. \tag{10}$$

Для определения c_0 в формуле (10) возьмем $\Phi(z)$ в бесконечности, где интегральное выражение равно нулю.

$$\Phi(z)\underset{z\to\infty}{=}\frac{c_0}{(z-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}},$$

но

$$\lim_{z\to\infty}\frac{(z-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}}{z}=-ie^{\pi i\alpha},$$

тогда

$$\Phi(z)=\frac{c_0}{-zie^{\pi i\alpha}}. \tag{11}$$

Одновременно согласно [2] имеем

$$\lim_{z\to\infty}\Phi(z)=\frac{iP_0(1+ik)}{2\pi}. \tag{12}$$

Тогда, решая совместно (11) и (12),

$$c_0=\frac{(1+ik)e^{\pi i\alpha}P_0}{2\pi}. \tag{13}$$

С учетом равенства (13) формула (10) имеет вид

$$\Phi(z)=\frac{n}{2\pi i(z-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}}\int\limits_{ab}\frac{(t+a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-t)^{\frac{1}{2}-\alpha}f'(t)}{f-z}dt+$$

$$+\frac{(1+ik)e^{\pi i\alpha}P_0}{2\pi(z-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-z)^{\frac{1}{2}-\alpha}}. \tag{14}$$

Выполняя ряд преобразований, а также применяя формулу Сохоцкого — Племеля, на основании уравнений (8) и (14) получаем уравнение для определения давления на линии касания:

$$P(t_0)=-\frac{1}{K}\cos\pi\alpha\sin\pi\alpha f'(t_0)+\frac{\cos^2\pi\alpha}{\pi K(t_0-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-t_0)^{\frac{1}{2}-\alpha}}\times$$

$$\times\int\limits_a^b\frac{(t-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-t)^{\frac{1}{2}-\alpha}f'(t)}{t-t_0}dt+\frac{P_0\cos\pi\alpha}{\pi(t_0-a)^{\frac{1}{2}+\alpha}(b-t_0)^{\frac{1}{2}-\alpha}}. \tag{15}$$

Аналогичным путем может быть получено уравнение для определения касательных сил (сил трения) на линии касания.

Формула (15) связывает величину нормального давления на любом участке линии контакта с формой и физико-механическими свойствами контактирующих тел. В результате можно получить эпюру распределения нормальных сил вдоль линии касания в зависимости от указанных выше факторов.

Вывод

Учет указанных выше явлений позволит более качественно подойти к теории некоторых проблем механизации производственных процессов в рыбной промышленности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колосов Г. В. Применение комплексной переменной к теории упругости. М., Гостехиздат, 1935. 258 с.

2. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., Изд-во АН СССР, 1954. 647 с.

3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Изд-во технико-теоретической литературы, 1953. 297 с.

4. Глаголев Н. И. Выражение работы сил трения при качении цилиндрических тел.— В кн.: Теория трения и износа. М., 1965, с. 68—72.

On contacts between two elastic bodies at friction .

S. I. Polulyak

SUMMARY

The fish body contacts with elements of fishing gear and other subjects. In places of contact changes occur in the geometrical forms and friction is induced. The problem of interaction between two elastic bodies on the line of contact is considered with regard to friction forces. An integral expression for linking the normal pressure stress on the line of contact with the form of bodies and their physical and mechanical properties is obtained. On the basis of the expression a projection diagram showing the distribution of the normal (compressing) stress along the line of contact can be obtained. The problem is solved by the methods of the theory on the function of complex variable applied to the flat theory of elasticity worked out by Academician Mushelishvili.